16/5/16

$(E_1, \langle\ \rangle) \xrightarrow{f} (E_2, \langle\ \rangle)$

f ισομετρία: $\vec{\alpha} \in E_1 \Rightarrow \|f(\vec{\alpha})\|_2 = \|\vec{\alpha}\|_1$

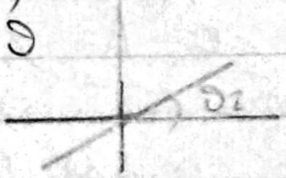
f ισομετρία $\Leftrightarrow$ Αν $\{\vec{e_1} \ \ \vec{e_n}\}$ ΟΚΒ του E_1
τότε $\{f(\vec{e_1}) \ \ f(\vec{e_n})\}$ ΟΚΒ του E_2

$f: E \to E$ ισομετρία
α ορθοκανονική βάση του $E \Leftrightarrow [f]_a^a$ είναι ορθογώνιος

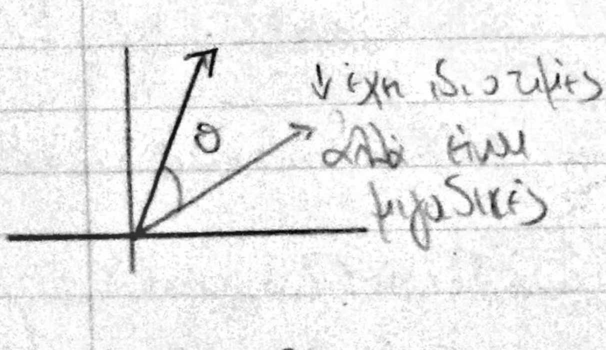
A ορθογώνιος $A^t \cdot A = I_{n\times n}$ $\quad A^{-1} = A^t$
$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
A ορθογώνιος

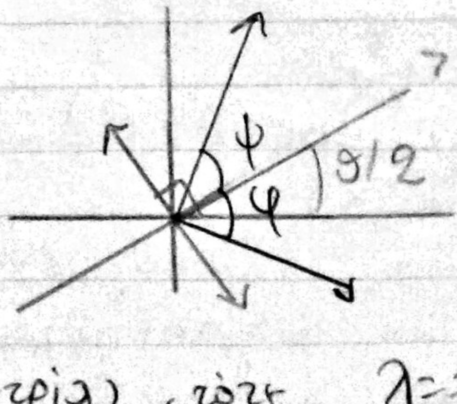
i) $A = \begin{pmatrix} \text{συνθ} & -\text{ημθ} \\ \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{pmatrix}$
στροφή κατά γωνία θ

ii) $A = \begin{pmatrix} \text{συνθ} & \text{ημθ} \\ \text{ημθ} & -\text{συνθ} \end{pmatrix}$ συμμετρία



A ορθογώνιος $\Rightarrow A^t \cdot A = I \Rightarrow \det(A^t \cdot A) = \det I \Leftrightarrow$
$\det(A^t) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$





Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή ισομετρίας, τότε $\lambda = \pm 1$

· Έστω $\vec{\alpha}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} f(\vec{\alpha}) = \lambda\vec{\alpha} \\ \vec{\alpha} \neq 0 \end{matrix}\right\}$, f ισομετρία άρα $\|f(\vec{\alpha})\| = \|\vec{\alpha}\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\lambda\vec{\alpha}\| = \|\vec{\alpha}\|$

$\Rightarrow |\lambda| \, \|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\alpha}\|$ · $\|\vec{\alpha}\| \neq 0$

$|\lambda| = +1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

· Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή ορθογώνιου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του πίνακα A

$X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $X \neq 0_{n\times 1}$ $AX = \lambda X$ γωνίδες εσωτερικό (κανονικό) του $\mathbb{R}^{n\times 1}$

• $\langle AX, AX \rangle = \langle \lambda X, \lambda X \rangle$

$(AX)^t AX = (\lambda X)^t (\lambda X)$

$\Rightarrow X^t \cdot A^t \cdot AX = \lambda^2 X^t \cdot X$

$|X|^2 = X^t \cdot X$ $= \lambda^2 \|X\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

$X \neq 0_{n\times 1} \Rightarrow \|X\| \neq 0$

Θεώρημα Euler: Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος με $\det A = 1$. Τότε ο A έχει το 1 ιδιοτιμή και παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο (Π). Επιπλέον υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\eta\mu\theta \\ 0 & \eta\mu\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Απόδειξη

$\chi_A(x) = \det(A - xI)$ είναι βαθμού 3 και ανήκει στο $\mathbb{R}[x]$

i) και οι 3 ιδιοτιμές (ρίζες) $\chi_A(x)$ είναι πραγματικές

ή ii) η μία πραγματική (ρ_1) και οι άλλες δύο είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. (ρ_2 και ρ_3)

$\det A = 1 \Rightarrow \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1$

i) $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$, ρ_1, ρ_2, ρ_3 ιδιοτιμές ορθογώνιου πίνακα

$\Rightarrow \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \{1, -1\}$

Αφού ρ_1, ρ_2, ρ_3 συνεπάγεται τουλάχιστον μία $+1$

ii) $\rho_1 \in \mathbb{R}$

$\rho_3 = \bar{\rho_2}$ $\quad 1 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 = \rho_1 (\rho_2 \bar{\rho_2}) = \rho_1 (\|\rho_2\|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_1 > 0$ $\quad \Rightarrow \boxed{\rho_1 = 1}$

$\rho_1 \in \{-1, 1\}$

- Έστω $X_1 \neq 0_{n\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1: Έστω $\vec{\varepsilon_1} = \dfrac{X_1}{\|X_1\|}$

Ο άξονας (ε) προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\varepsilon_1}$, $\langle \vec{\varepsilon_1} \rangle$

Συμπληρώνουμε το $\vec{\varepsilon_1}$ σε ΟΚΒ του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ με τα ιδιοδιανύσματα $\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$

$L_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ $\quad [L_A]_\alpha^\alpha$ $\quad \alpha = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$X \xrightarrow{L_A} AX$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$

$[L_A]_\varepsilon^\varepsilon = \underbrace{[I]_\alpha^\varepsilon}_{P^t} \underbrace{[L_A]_\alpha^\alpha}_{A} \underbrace{[I]_\varepsilon^\alpha}_{P}$ $\quad \varepsilon = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$ ε ΟΚΒ

$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \delta \\ 0 & \beta & \varepsilon \\ 0 & \gamma & \zeta \end{pmatrix} =$

$L_A(\vec{\varepsilon_1})$, $L_A(\vec{\varepsilon_3})$

$L_A \cdot \vec{\varepsilon_1} = A \cdot \vec{\varepsilon_1} = \vec{\varepsilon_1} + 0\vec{\varepsilon_2} + 0\vec{\varepsilon_3}$

1η πρώτη στήλη $\vec{\varepsilon_1}$, δεύτερη στήλη $\vec{\varepsilon_2}$, τρίτη στήλη $\vec{\varepsilon_3}$

P ορθογώνιος αφού ε είναι ορθοκανονική βάση

$\Gamma^t \Gamma = (P^t \cdot A \cdot P)^t (P^t \cdot A \cdot P) = P^t \cdot A^t \underbrace{(P^t)^t \cdot P^t}_{} A \cdot P$ P ορθογώνιος

$P^t A^t \cdot I \cdot AP = P^t \cdot A^t A \cdot P = P^t \cdot I \cdot P = P^t \cdot P = I$

Άρα Γ ορθογώνιος πίνακας

$L_A \vec{\varepsilon_2} = \text{συνθ}\,\vec{\varepsilon_2} + \text{ημθ}\,\vec{\varepsilon_2}$

$L_A \vec{\varepsilon_3} = \text{ημθ}\,\vec{\varepsilon_2} + \text{συνθ}\,\vec{\varepsilon_3}$

άξονας (ε): $\langle \vec{\varepsilon_1} \rangle$

κάθετο επίπεδο: $\langle \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \rangle$ (Π)

$\langle \vec{\varepsilon_1} \rangle \perp \langle \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \rangle$

$tr\Gamma = tr(P^t A \cdot P)$

$= tr(P^{-1} A \cdot P)$

$= tr(A)$ - όμοιοι πίνακες έχουν ίσο ίχνος

$1 + \text{συνθ} + \text{συνθ} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Άρα έχω $1 + 2\,\text{συνθ} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$\Leftrightarrow \text{συνθ} = \dfrac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$